Validation des procédés : Cp,Cpk, écart type… les méthodes statistiques

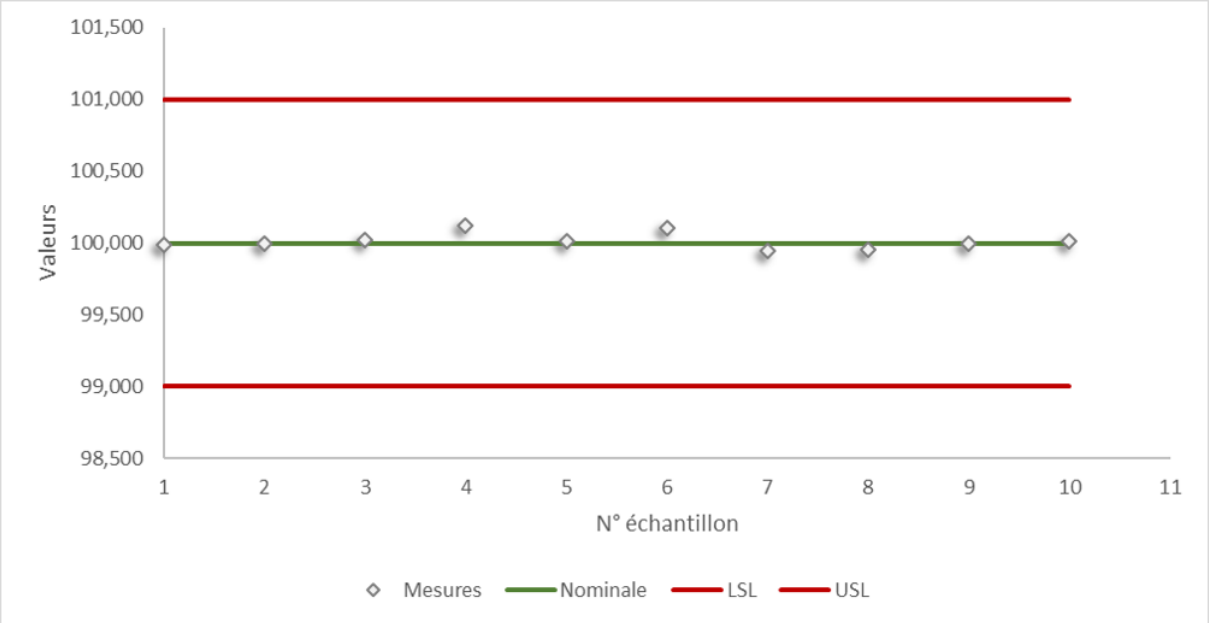
Par Guillaume Promé
le 23 Mai. 2019 •

Lorsque les quantités produites sont suffisamment importantes, il peut être utile aux fabricants de **valider la production**, plutôt que d'effectuer des tests unitaires sur chaque dispositif.

Ces validations utilisent des **outils mathématiques** qu'il est nécessaire de comprendre pour les utiliser correctement.

Remarque : le sujet est traité dans la série de normes du comité ISO/TC 69/SC 4.

Définir les exigences sur la production



Avant de valider la production il faut **définir des exigences sur les dispositifs fabriqués** : ces exigences sont **quantitatives**, elles portent sur des **caractéristiques physiques critiques** du produit (exemple : une longueur, un diamètre, un taux…)

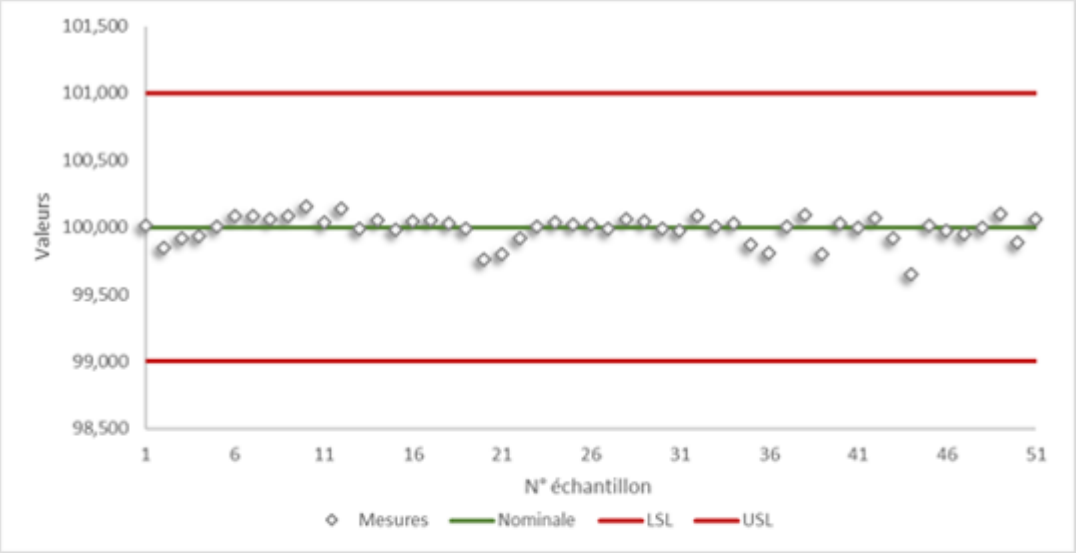
On fixe :

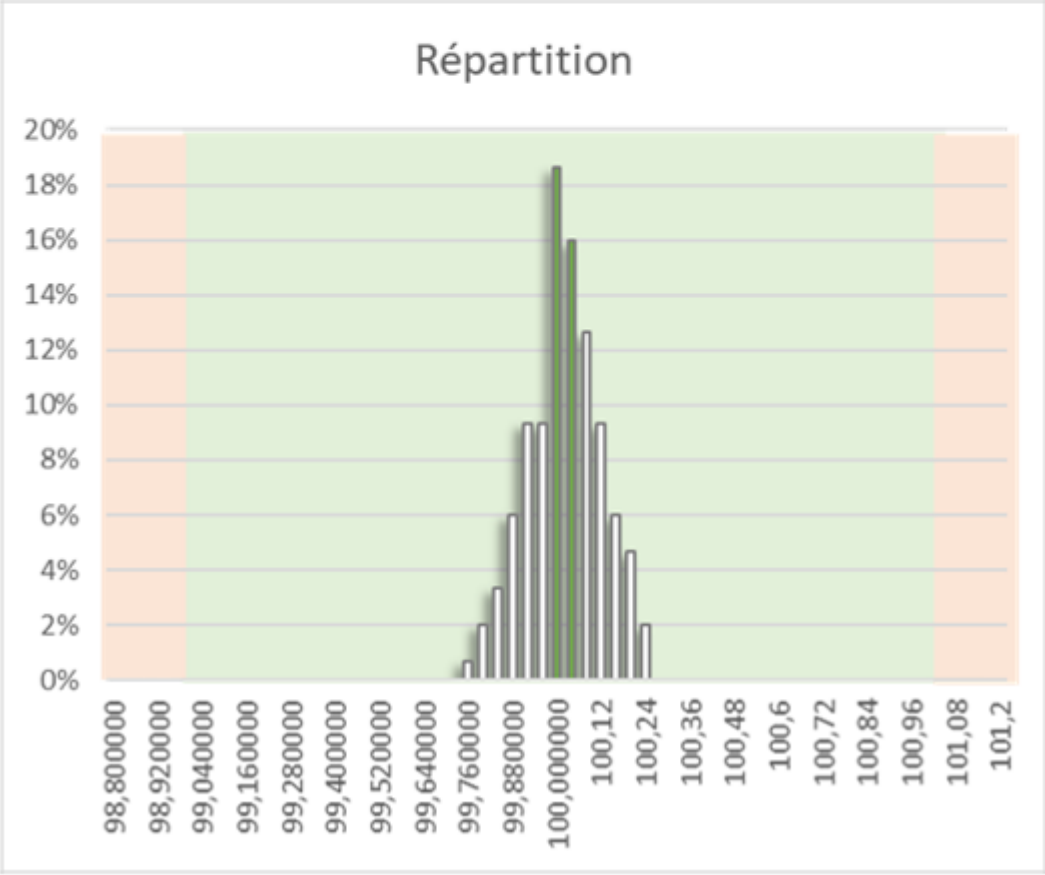
- Une **valeur nominale** (la valeur attendue) : X
- La **tolérance haute** : USL
- La **tolérance basse** : LSL

Ainsi, les pièces en dehors de la plage de tolérance seront non-conformes.

Distribution normale des valeurs mesurées

Pour plusieurs dispositifs fabriqués, une caractéristique mesurable va varier selon une **distribution normale** : la répartition des mesures (le nombre de pièce pour chaque plage de valeur) suit une **courbe de gauss** :





Dans cet exemple les 50 mesures permettent de tracer l'histogramme de répartition des valeurs, le fond vert couvre les valeurs **conformes**, les mesures **NC** sont en zone rouge. L'essentiel des points est proche de la **valeur moyenne**.

Plus la zone (rouge) de NC est éloignée de la courbe et plus le produit est susceptible d'être conforme

La validation de la production va démontrer que :

- la courbe est suffisamment **étroite**, pour ne pas dépasser de la zone de tolérance, la production est alors **capable**.
- la courbe est suffisamment **centrée** autour de la valeur nominale, pour ne pas sortir de la zone de conformité, la production est alors **répétable**.

Le centrage et la largeur de la courbe dépendent des **réglages** de l'outil de production et de ses éventuelles **dérives**.

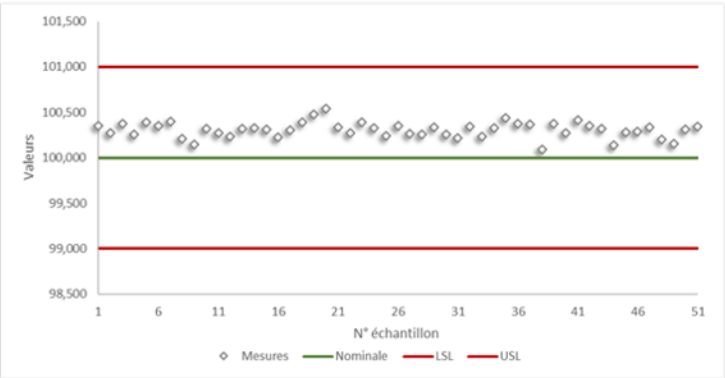
Valeur moyenne et écart type des valeurs mesurées

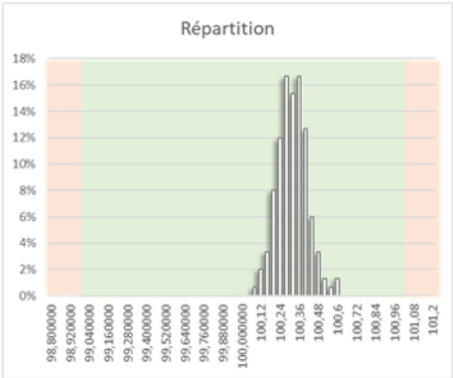
Pour un lot de **n** pièces produites et les mesures **x** associées, on calcule :

- la valeur moyenne **$\mu : \Sigma$ (mesures) / n**
- l'écart type **$\sigma : \sqrt{\ (\Sigma(\ (x - \mu)^2\ )\ /\ n\ )}$**

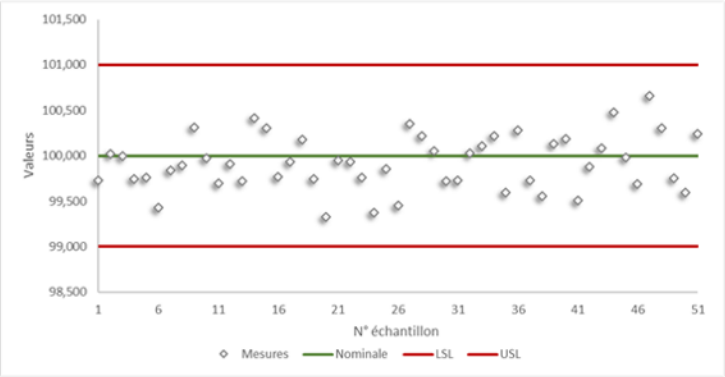
La valeur moyenne est facile à comprendre (une valeur "au centre" de toutes les mesures), l'écart type est moins intuitif : il représente à quel point les mesures "partent dans tous les sens".

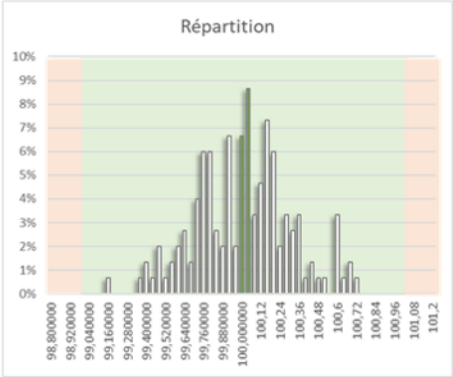
μ = 100,3
σ = 0,1





μ = 100
σ = 0,33

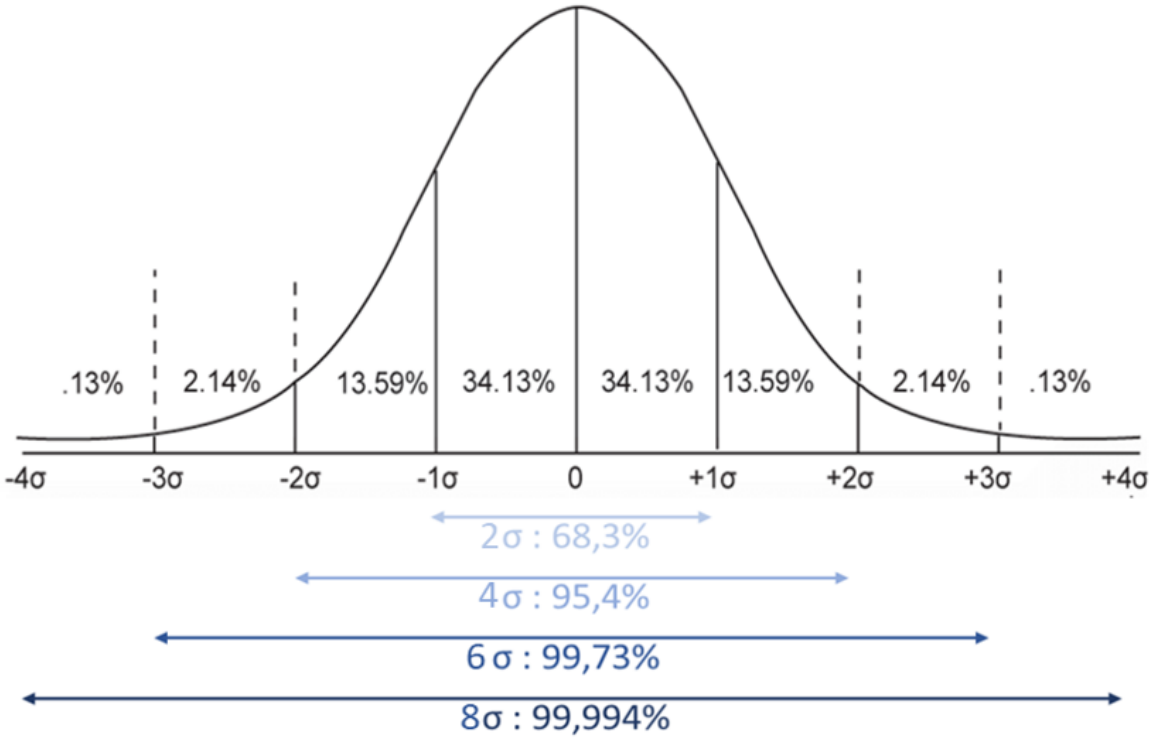




Probabilité de non-conformité

C'est maintenant que l'outil mathématique se révèle utile : une fois la valeur moyenne et l'écart type identifiés il est possible de connaitre la probabilité d'un point d'être dans une plage de valeur donnée.

La probabilité P d'avoir une valeur dans un intervalle autour de la valeur moyenne est fonction du nombre d'écart types qui composent cet intervalle :



On en déduit la probabilité que la valeur soit en dehors de l'intervalle (que le produit soit non-conforme):

- x hors [-σ/2; σ/2] : 62%
- x [-σ; σ] : 32%
- x [-2σ; +2σ] : 5%
- x [-3σ; +3σ] : 0,27%
- x [-4σ; +4σ] : 0,006%
- x [-6σ; +6σ] : 0,0000002%

Le but est d'avoir des tolérances (USL et LSL) très éloignées de la valeur moyenne, typiquement de 4σ chacune : avec une probabilité de conformité de 99,994% et un taux de non-conformité de 66ppm (pièces par million).

Coefficients de capacité Cp, Cpk, Cpm

Calculs

Des indices sont nécessaires pour analyser les résultats de production :

- **Indice de capacité du procédé : Cp = (USL – LSL) / 6σ**

Le coefficient Cp regarde “à quel point la plage de tolérance est proche de 6σ” : plus Cp est grand et plus votre procédé est capable de produire des résultats conformes.

Avec Cp = 1 la plage de conformité couvre 6σ, la probabilité d’être non-conforme est de 0,27%
Avec Cp = 1,33 la plage de conformité couvre 8σ, la probabilité d’être non-conforme est de 0,007%

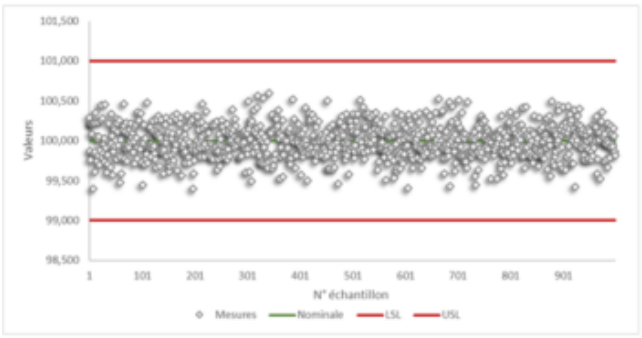
- **Indice de capacité minimal du procédé Cpk = min((USL – μ)/3σ ; (μ – LSL)/3σ)**

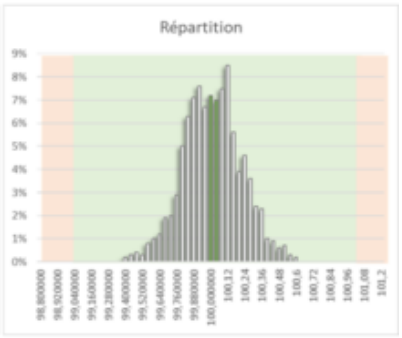
Le coefficient Cpk tient compte d’un éventuel **décentrage,** qui malgré un Cp élevé rendrait le procédé peu répétable

- **Indice de capacité machine : Cpm = Cp / √(1 + 9.(Cp – Cpk)^2)**

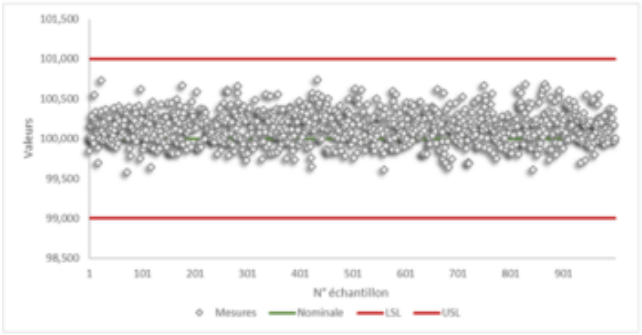
Le coefficient Cpm (très utile car très réactif) tient compte du décentrage des résultats, il est couramment utilisé pour surveiller le **déréglage** d’une machine.

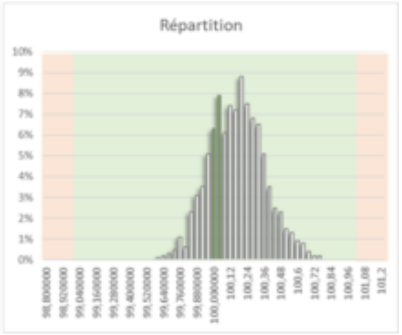
Cp = 1,59
Cpk =158
Cpm = 1,59



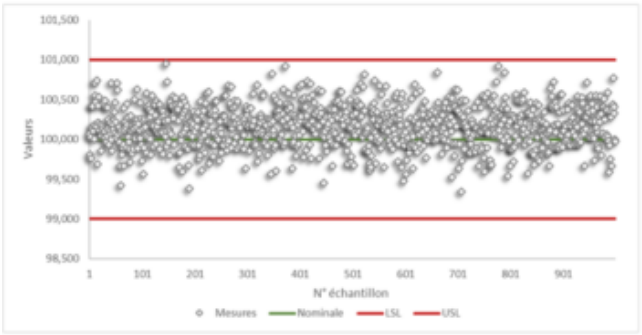


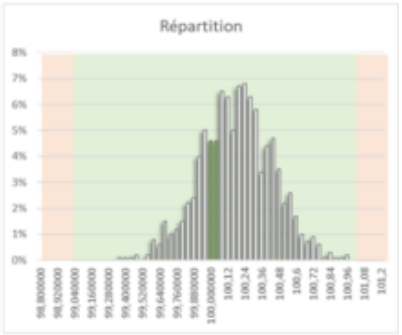
Cp = 1,7
Cpk =1,44
Cpm = 1,06



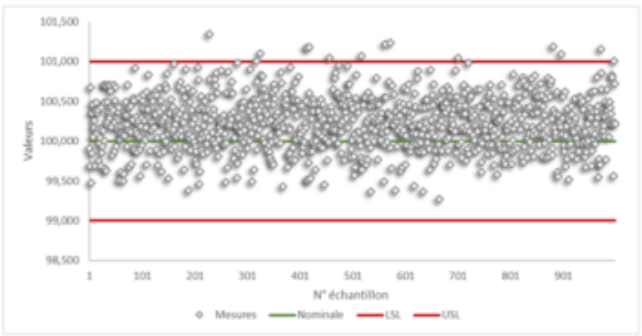


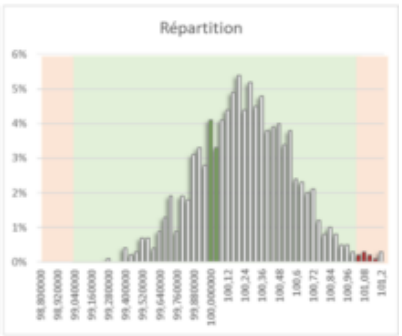
Cp = 1,32
Cpk =1,09
Cpm = 0,88





Cp = 0,98
Cpk =0,76
Cpm = 0,67





Seuils utiles

Les **seuils,** permettant de statuer si les coefficients Cp, Cpk et Cpm sont satisfaisants, dépendent de la **confiance** souhaitée :

Les seuils courants et les probabilités de confiance associées sont données ci-dessous, un seuil de 1,33 est très souvent utilisé, 1,66 relève des productions d'excellence (nécessaire pour de grandes quantités de pièces).

Seuil	Sigmas (score z)	confiance
0,67	2,01	95,56%
1	3	99,73%
1,33	3,99	99,9934%
1,66	4,98	99,999936%
2	6	99,9999998%

On note le "score z" : **z = 3.S**

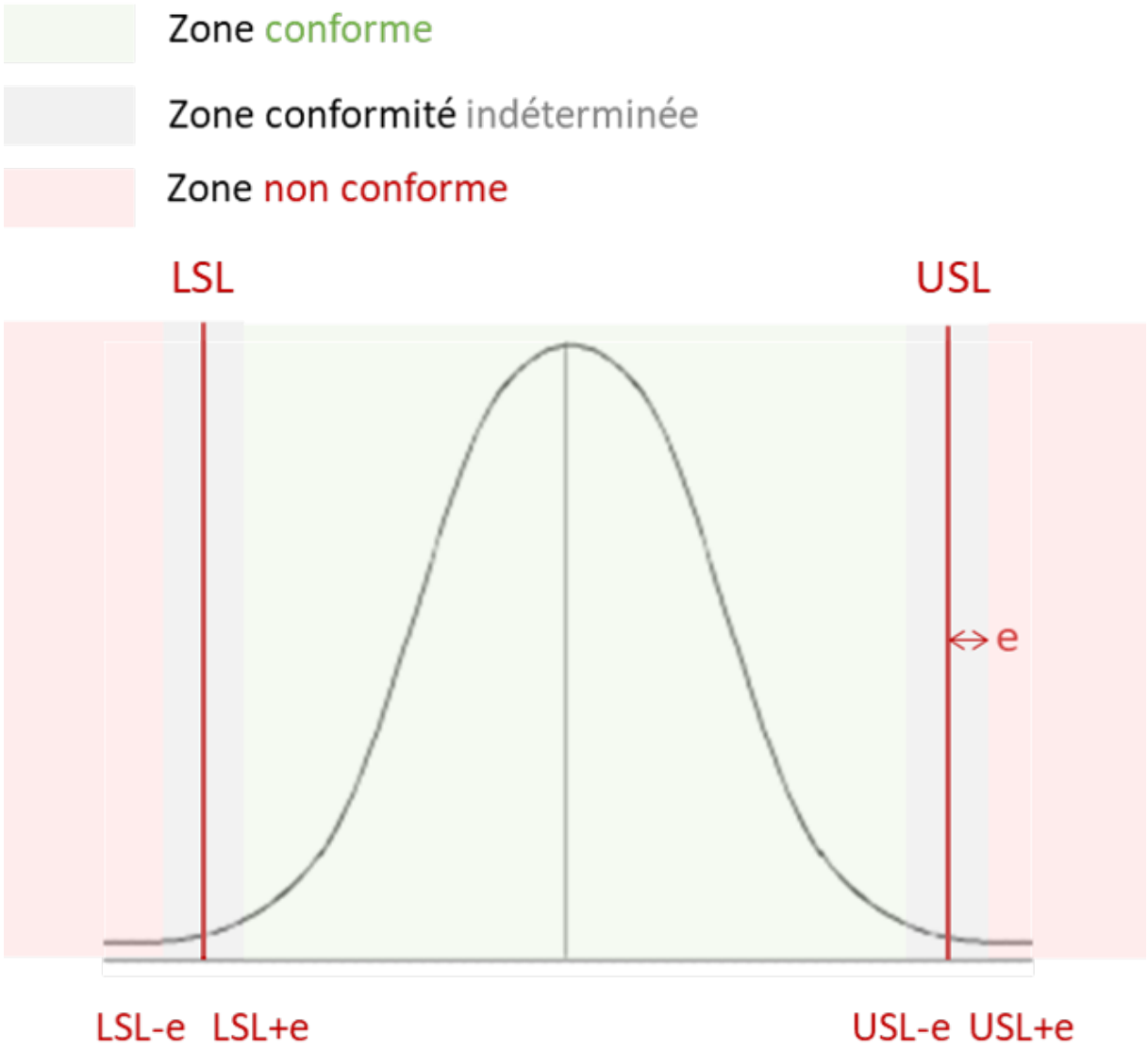
Nombres d'échantillons utilisés et erreur induite

On peut calculer l'erreur e en fonction de σ, du nombre d'échantillons n et de z :

$$\mathbf{e = z.\sigma/\sqrt{n}}$$

L'erreur va réduire la plage de conformité, en effet : autour des valeurs LSL +/- e et USL +/-1 vous ne savez pas si la mesure est conforme.

Vous avez maintenant trois zones : conforme, non conforme et inconnu :

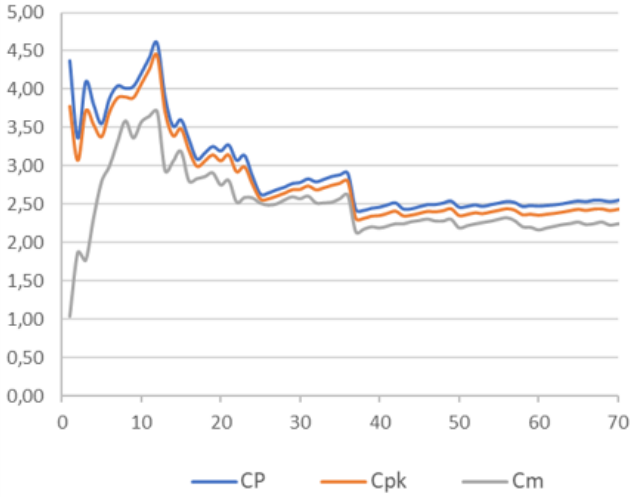
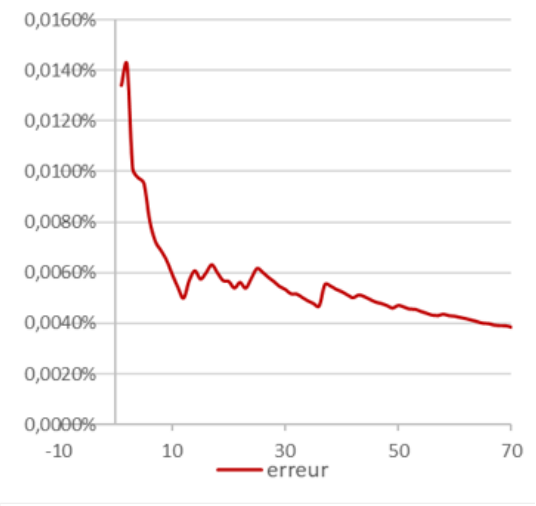


Comment utiliser tout ça ?

Pour chaque essai de validation (*il y a souvent un essai par facteurs d'influence et cycle de production*) :

1. Faire quelques dizaines de **prélèvements** (classiquement plus de 20)
2. Calculer les **coefficients** Cp, Cpk, Cm et l'erreur
3. Continuer jusqu'à avoir des coefficients **stables** puis une erreur tolérable

Vous tiendrez compte du **nombre de dispositifs** produits pour fixer un seuil pour les indices de capabilité. Un seuil élevé – supérieur à 1,3 – serra nécessaire pour de grosses productions où même les faibles probabilités de non-conformité sont critiques.

Le nombre de prélèvements requis va de quelques dizaines à plusieurs centaines en fonction de l'**écart type** et de vos volumes de production.

Ci-dessous : l'évolution de l'estimation des coefficients et de l'erreur en fonction du nombre d'échantillons, pour un écart type faible (moins d'1/5 de la tolérance), on constate que les valeurs sont correctement estimées après une quarantaine d'échantillons :